

LE GROUPE FONDAMENTAL D'UN ESPACE HOMOGÈNE D'UN GROUPE ALGÈBRIQUE LINÉAIRE

MIKHAIL BOROVoi ET CYRIL DEMARCHE

RÉSUMÉ. Soit X un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe G sur \mathbb{C} . Soit $x \in X(\mathbb{C})$. On désigne par H le stabilisateur de x dans G . On montre qu'on peut définir algébriquement le groupe fondamental topologique $\pi_1^{\text{top}}(X(\mathbb{C}), x)$. Si $\text{Pic}(G) = 0$ et H est connexe ou abélien, on calcule $\pi_1^{\text{top}}(X(\mathbb{C}), x)$ en termes des groupes de caractères de G et H . En outre, si G et X sont définis sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$, on calcule la partie première à p du groupe fondamental étale de X en termes des groupes de caractères de G et H (si $\text{Pic}(G) = 0$ et H est connexe ou abélien).

ABSTRACT. Let X be a homogeneous space of a connected linear algebraic group G defined over \mathbb{C} . Let $x \in X(\mathbb{C})$. We denote by H the stabilizer of x in G . We show that the topological fundamental group $\pi_1^{\text{top}}(X(\mathbb{C}), x)$ can be defined algebraically. If $\text{Pic}(G) = 0$ and H is connected or abelian, we compute $\pi_1^{\text{top}}(X(\mathbb{C}), x)$ in terms of the character groups of G and H . Furthermore, when G and X are defined over an algebraically closed field of characteristic $p \geq 0$, we compute the prime-to- p étale fundamental group of X in terms of the character groups of G and H (if $\text{Pic}(G) = 0$ and H is connected or abelian).

0. INTRODUCTION

Le groupe fondamental topologique d'un groupe linéaire connexe sur \mathbb{C} a été défini algébriquement par Merkurjev [Me, § 10.1] et par le premier auteur [B2, Def. 1.3]. Une troisième définition a été proposée par Colliot-Thélène [CT, Prop.-Déf. 6.1]. La définition de Colliot-Thélène a été généralisée par González-Avilés [GA, Def. 3.7] aux schémas en groupes réductifs. Dans cet article on définit algébriquement le groupe fondamental topologique d'un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire sur \mathbb{C} , et on calcule ce groupe fondamental sous une certaine condition de connexité sur le stabilisateur d'un point. De plus, en utilisant des résultats récents de Brion et Szamuely (voir [BrSz]) et des résultats classiques sur le groupe fondamental (voir Szamuely [Sz]), on considère le cas où G et X sont définis sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$, et on calcule le groupe fondamental étale premier à p de X en fonction des groupes de caractères de G et H dans ce cas (sous la même hypothèse de connexité pour les stabilisateurs).

0.1. Soit X une variété algébrique définie sur \mathbb{C} . Soit $x \in X(\mathbb{C})$. On considère l'espace topologique pointé $(X(\mathbb{C}), x)$ et le groupe fondamental

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 14F35, 14M17.

Key words and phrases. Algebraic fundamental group, étale fundamental group, homogeneous space, linear algebraic group.

M. Borovoi a été partiellement soutenu par le Centre Hermann Minkowski pour la Géométrie.

topologique $\pi_1^{\text{top}}(X(\mathbb{C}), x)$. On écrit $\pi_1^{\text{top}}(X, x)$ pour $\pi_1^{\text{top}}(X(\mathbb{C}), x)$. On pose $\mathbb{Z}(1) = \pi_1^{\text{top}}(\mathbb{G}_m(\mathbb{C}), 1) = \pi_1^{\text{top}}(\mathbb{C}^\times, 1)$, où \mathbb{G}_m est le groupe multiplicatif. Le groupe $\mathbb{Z}(1)$ est isomorphe à \mathbb{Z} , mais non canoniquement. On pose

$$\pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1) := \text{Hom}(\mathbb{Z}(1), \pi_1^{\text{top}}(X, x)).$$

Alors $\pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1)$ est un groupe isomorphe à $\pi_1^{\text{top}}(X, x)$, mais non canoniquement.

Soit $f: (\mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}, 1) \rightarrow (X, x)$ un morphisme de variétés pointées. Par fonctorialité on obtient un élément

$$f_*^{\text{top}} \in \text{Hom}(\mathbb{Z}(1), \pi_1^{\text{top}}(X, x)) = \pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1).$$

On dit que les éléments de $\pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1)$ de la forme f_*^{top} sont *strictement algébriques*. On désigne par $\pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1)_{\text{alg}}$ le sous-groupe de $\pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1)$ engendré par les éléments strictement algébriques.

0.2. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0. On pose $\widehat{\mathbb{Z}}(1) = \pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{G}_{m, k}, 1)$, où $\pi_1^{\text{ét}}$ désigne le groupe fondamental étale, voir Szamuely [Sz, § 5.4]. Le groupe $\widehat{\mathbb{Z}}(1)$ est isomorphe à $\widehat{\mathbb{Z}}$, mais non canoniquement.

Soit X une variété algébrique sur k , et soit $x \in X(k)$. On pose

$$\pi_1^{\text{ét}}(X, x)(-1) := \text{Hom}_{\text{cont.}}(\widehat{\mathbb{Z}}(1), \pi_1^{\text{ét}}(X, x)),$$

groupe des homomorphismes de groupes, continus, de $\widehat{\mathbb{Z}}(1)$ vers $\pi_1^{\text{ét}}(X, x)$. Alors $\pi_1^{\text{ét}}(X, x)(-1)$ est un groupe isomorphe à $\pi_1^{\text{ét}}(X, x)$, mais non canoniquement.

Soit $f: (\mathbb{G}_{m, k}, 1) \rightarrow (X, x)$ un morphisme de k -variétés pointées. Par fonctorialité on obtient un élément

$$f_*^{\text{ét}} \in \text{Hom}_{\text{cont.}}(\widehat{\mathbb{Z}}(1), \pi_1^{\text{ét}}(X, x)) = \pi_1^{\text{ét}}(X, x)(-1).$$

On désigne par $\pi_1^{\text{ét}}(X, x)(-1)_{\text{alg}}$ le sous-groupe de $\pi_1^{\text{ét}}(X, x)(-1)$ engendré par les éléments de la forme $f_*^{\text{ét}}$.

0.3. Soit (X, x) une variété pointée sur \mathbb{C} . Alors $\pi_1^{\text{ét}}(X, x)$ est canoniquement isomorphe à la complétion profinie de $\pi_1^{\text{top}}(X, x)$, voir Grothendieck [Gr, Exposé XII, Corollaire 5.2] et en particulier $\widehat{\mathbb{Z}}(1) = \pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}, 1)$ est canoniquement isomorphe à la complétion profinie de $\mathbb{Z}(1) = \pi_1^{\text{top}}(\mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}, 1)$. Tout homomorphisme $\mathbb{Z}(1) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(X, x)$ induit un homomorphisme des complétions $\widehat{\mathbb{Z}}(1) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X, x)$. Par conséquent on obtient un homomorphisme $\varkappa: \pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X, x)(-1)$ identifiant $\pi_1^{\text{ét}}(X, x)(-1)$ avec la complétion profinie de $\pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1)$.

Théorème 0.4 (Théorème 1.5). *Soit X un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe G défini sur \mathbb{C} . Alors l'homomorphisme $\varkappa: \pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X, x)(-1)$ induit un isomorphisme de groupes*

$$\pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(X, x)(-1)_{\text{alg}} \subset \pi_1^{\text{ét}}(X, x)(-1).$$

Comme T. Szamuely nous l'a fait remarquer, ce résultat ne s'étend pas aux groupes algébriques non linéaires. En effet, déjà pour une variété abélienne A sur \mathbb{C} de dimension positive, il n'y a pas de morphisme non constant de $\mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}$ vers A (car il n'existe pas d'application rationnelle non constante de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ vers A), alors que $\pi_1^{\text{top}}(A) \neq 0$.

Corollaire 0.5 (Corollaire 1.6). *Soit G un groupe algébrique linéaire connexe arbitraire sur \mathbb{C} , et soit X un espace homogène arbitraire de G . Soit $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{C})$. Alors le groupe fondamental topologique $\pi_1^{\text{top}}(\tau X, \tau x)$ est canoniquement isomorphe à $\pi_1^{\text{top}}(X, x)$.*

On remarque que ce n'est pas le cas pour des variétés lisses quelconques sur \mathbb{C} , voir Serre [Se] et Milne et Suh [MS].

Question 0.6. Est-il vrai ou non que pour X comme dans le corollaire 0.5, $X(\mathbb{C})$ et $(\tau X)(\mathbb{C})$ sont homotopiquement équivalents, ou même homéomorphes, ou même que X et τX sont isomorphes sur \mathbb{C} ?

0.7. Soit X un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe G défini sur un corps algébriquement clos k . On choisit un k -point $x \in X(k)$ et on pose $H = \text{Stab}_G(x)$. On désigne par H^{mult} le groupe quotient maximal de H de type multiplicatif. On pose $H^{\text{ker} \text{car}} := \ker[H \rightarrow H^{\text{mult}}]$. Alors $H^{\text{ker} \text{car}}$ est l'intersection des noyaux de tous les caractères $\chi: H \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}$ de H . On suppose :

- (i) $\text{Pic}(G) = 0$,
- (ii) $H^{\text{ker} \text{car}}$ est connexe.

On remarque que (i) est satisfait si G est réductif et son groupe dérivé est simplement connexe (voir Sansuc [Sa], Lemme 6.9 et Remarques 6.11.3) et que (ii) est satisfait si H est connexe ou abélien.

On désigne par $\widehat{G} := \text{Hom}(G, \mathbb{G}_{m,k})$ et $\widehat{H} := \text{Hom}(H, \mathbb{G}_{m,k})$. On écrit

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G} \rightarrow \widehat{H}, \mathbb{Z}) := \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0([\widehat{G} \xrightarrow{i^*} \widehat{H}], \mathbb{Z}),$$

où $[\widehat{G} \xrightarrow{i^*} \widehat{H}]$ est un complexe en degrés 0 et 1, et l'homomorphisme i^* est induit par l'inclusion $i: H \hookrightarrow G$. Voir § 3.1 ci-dessous pour la définition de $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0$.

Théorème 0.8 (Théorème 3.3). *Soit X un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe G sur \mathbb{C} . Soit $x \in X(\mathbb{C})$, on pose $H = \text{Stab}_G(x)$. On suppose que $\text{Pic}(G) = 0$ et que $H^{\text{ker} \text{car}}$ est connexe. Alors il existe un isomorphisme canonique de groupes abéliens*

$$\pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G} \rightarrow \widehat{H}, \mathbb{Z}).$$

Notations 0.9. Soit k un corps algébriquement clos. Soit G un groupe algébrique linéaire connexe défini sur k . On utilise les notations suivantes :

- G^u est le radical unipotent de G ;
- $G^{\text{red}} = G/G^u$, qui est un groupe réductif ;
- $G^{\text{ss}} = [G^{\text{red}}, G^{\text{red}}]$, qui est semi-simple ;
- G^{sc} est le revêtement universel de G^{ss} , il est simplement connexe ;
- $G^{\text{tor}} = G^{\text{red}}/G^{\text{ss}}$, qui est un tore ;
- $G^{\text{ssu}} = \ker[G \rightarrow G^{\text{tor}}]$, qui est une extension d'un groupe semi-simple connexe par un groupe unipotent.

On remarque que G^{tor} est le plus grand quotient torique de G et que G^{ssu} est connexe et sans caractères.

Si T est un tore sur k , on pose $T_* := \text{Hom}_k(\mathbb{G}_{m,k}, T)$, alors $T_* \cong \text{Hom}(\widehat{T}, \mathbb{Z})$.

Soit H un groupe algébrique linéaire sur k . On écrit $\pi_0(H) = H/H^0$, où H^0 est la composante neutre de H . Si $\pi_0(H)$ est abélien, on pose

$$\pi_0(H)(-1) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Hom}_k(\pi_0(H), \mathbb{G}_{m,k}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

On remarque que si $k = \mathbb{C}$, le groupe $\pi_0(H)(-1)$ est isomorphe à $\pi_0(H)$, mais non canoniquement.

Corollaire 0.10 (Corollaire 3.10). *Sous les hypothèses du théorème 0.8*

(a) *on a une suite exacte canonique*

$$(0.1) \quad \mathrm{Hom}(\widehat{H}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}(\widehat{G}, \mathbb{Z}) \rightarrow \pi_1^{\mathrm{top}}(X, x)(-1) \rightarrow \pi_0(H)(-1) \rightarrow 0,$$

où $i: H \hookrightarrow G$ est l'homomorphisme d'inclusion ;

(b) *si en plus le sous-groupe H est connexe, alors la suite exacte (3.4) induit un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{coker}[H_*^{\mathrm{tor}} \xrightarrow{i_*} G_*^{\mathrm{tor}}] \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\mathrm{top}}(X, x)(-1).$$

0.11. Soit G, X, H comme dans le théorème 0.8, et on suppose que H est connexe. On choisit des tores maximaux compatibles $T_{H^{\mathrm{sc}}} \subset H^{\mathrm{sc}}$ et $T_{H^{\mathrm{red}}} \subset H^{\mathrm{red}}$. On a un homomorphisme canonique $T_{H^{\mathrm{red}}} \rightarrow G^{\mathrm{tor}}$. On considère la cohomologie du complexe de groupes de cocaractères

$$C_{X*} := \langle T_{H^{\mathrm{sc}*}} \rightarrow T_{H^{\mathrm{red}*}} \rightarrow G_*^{\mathrm{tor}} \rangle,$$

où \langle, \rangle signifie que G_*^{tor} est en degré 0. Ce complexe est isomorphe au dual (au sens du foncteur "Hom interne" $\mathcal{H}om_{\mathbb{Z}}^*(\cdot, \mathbb{Z})$) du complexe \widehat{C}_X (ou \widehat{C}'_X) introduit dans [D1] et [D2].

On remarque que $\mathcal{H}^0(C_{X*}) = \mathrm{coker}[H_*^{\mathrm{tor}} \xrightarrow{i_*} G_*^{\mathrm{tor}}]$, et donc le corollaire 0.10(b) dit que $\pi_1^{\mathrm{top}}(X, x)(-1) \cong \mathcal{H}^0(C_{X*})$.

Théorème 0.12 (Théorème 3.11). *Soit X un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe G sur \mathbb{C} . Soit $x \in X(\mathbb{C})$, on pose $H = \mathrm{Stab}_G(x)$. On suppose que $\mathrm{Pic}(G) = 0$ et que H est connexe. Alors il existe un isomorphisme canonique de groupes abéliens*

$$\mathcal{H}^{-1}(C_{X*}) \xrightarrow{\sim} \pi_2^{\mathrm{top}}(X, x)(-1).$$

On remarque que le corollaire 0.10(b) est une version plus explicite de [BvH2, Thm. 8.5(i)]. On remarque également que le théorème 0.12 est plus fort que le théorème 8.5(ii) de [BvH2], où seulement $\pi_2^{\mathrm{top}}(X, x)(-1)$ modulo torsion a été calculé. Plus explicitement, le théorème 0.12 dit que

$$\pi_2^{\mathrm{top}}(X, x)(-1) \cong \ker[T_{H^{\mathrm{red}*}} \rightarrow G_*^{\mathrm{tor}}] / T_{H^{\mathrm{sc}*}}.$$

0.13. Supposons maintenant que G et X sont définis sur un corps algébriquement clos k de caractéristique quelconque $p \geq 0$. On note $\pi_1^{\mathrm{ét}}(X, x)^{(p')}$ le quotient maximal premier à p du groupe fondamental étale de X . On définit

$$\pi_1^{\mathrm{ét}}(X, x)^{(p')}(-1) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}}(\pi_1^{\mathrm{ét}}(\mathbb{G}_{m, k}, 1)^{(p')}, \pi_1^{\mathrm{ét}}(X, x)^{(p')}).$$

On écrit $\mathbb{Z}_{(p')}$ pour le produit direct des anneaux \mathbb{Z}_ℓ pour $\ell \neq p$.

En utilisant des résultats de Brion et Szamuely [BrSz], on démontre le théorème suivant, qui est une version du corollaire 0.10(b) en caractéristique positive :

Théorème 0.14 (Théorème 4.2). *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$. Soit G/k un groupe linéaire connexe lisse et X/k un espace homogène de G . Soit $x \in X(k)$, on pose $H := \mathrm{Stab}_G(x)$. On suppose que $\mathrm{Pic}(G) = 0$ et que H est lisse et connexe. Alors il existe un isomorphisme canonique de groupes abéliens :*

$$\mathrm{coker}[H_*^{\mathrm{tor}} \xrightarrow{i_*} G_*^{\mathrm{tor}}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\mathrm{ét}}(X, x)^{(p')}(-1).$$

On remarque que le théorème 0.14 généralise le cas particulier du théorème 1.2(b) de Brion et Szamuely [BrSz] où G est un groupe linéaire, et a été inspiré par ce théorème de Brion et Szamuely. Remarquons également que l'hypothèse de lissité sur H peut être enlevée (voir [BrSz], début de la section 3).

On peut généraliser le théorème 0.14 en assouplissant l'hypothèse de connexité sur le stabilisateur, comme dans le théorème 0.8.

Théorème 0.15 (Théorème 5.1). *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$. Soit G/k un groupe linéaire connexe lisse et X/k un espace homogène de G . Soit $x \in X(k)$, on pose $H := \text{Stab}_G(x)$. On suppose que $\text{Pic}(G) = 0$, H est lisse et H^{kercar} est connexe. Alors il existe un isomorphisme canonique de groupes abéliens :*

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G} \rightarrow \widehat{H}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(X, x)^{(p')}(-1).$$

Bien que le théorème 0.14 soit un cas particulier du théorème 0.15, on prouve le théorème 0.14 séparément, car il admet une preuve simple via une suite exacte de fibration. Remarquons à nouveau que l'hypothèse de lissité sur H peut être enlevée (voir [BrSz], début de la section 3).

Le plan de l'article est le suivant. Dans § 1 on prouve le théorème 0.4 et le corollaire 0.5. Dans § 2 on rappelle les constructions de groupes auxiliaires et d'espaces homogènes, dont nous avons besoin pour notre démonstration des théorèmes 0.8 et 0.15. Dans § 3 on prouve le théorème 0.8, le corollaire 0.10 et le théorème 0.12. Dans § 4 on prouve le théorème 0.14. Dans § 5 on prouve le théorème 0.15.

Remerciements : Nous remercions chaleureusement Tamás Szamuely pour ses précieux commentaires.

1. ESPACES HOMOGÈNES QUELCONQUES SUR \mathbb{C}

Dans cette section, on démontre le théorème 0.4 et le corollaire 0.5.

Proposition 1.1. *Soit (X, x) une variété pointée sur \mathbb{C} . Alors*

$$\varkappa(\pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1)_{\text{alg}}) = \pi_1^{\text{ét}}(X, x)(-1)_{\text{alg}},$$

où $\varkappa: \pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X, x)(-1)$ est l'homomorphisme défini dans § 0.3.

Démonstration. Soit $f: (\mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}, 1) \rightarrow (X, x)$ un morphisme de variétés pointées, alors $\varkappa(f_*^{\text{top}}) = f_*^{\text{ét}}$, ce qui démontre la proposition. \square

Proposition 1.2. *Soit X un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire G défini sur \mathbb{C} , et $x \in X(\mathbb{C})$. Alors tout élément de $\pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1)$ est strictement algébrique.*

Démonstration. D'abord, on remarque que si T est un \mathbb{C} -tore, alors tout élément de $\pi_1^{\text{top}}(T, 1)(-1) = T_*$ est strictement algébrique. Si G est un groupe algébrique linéaire connexe sur \mathbb{C} et $T \subset G$ un tore maximal, alors par [B2, Prop. 1.11] on a un isomorphisme canonique et fonctoriel en G $\pi_1^{\text{alg}}(G) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(G, 1)(-1)$, où π_1^{alg} désigne le groupe fondamental algébrique d'un groupe algébrique linéaire, défini dans [B2]. Par la définition de π_1^{alg} , l'homomorphisme $\pi_1^{\text{alg}}(T) \rightarrow \pi_1^{\text{alg}}(G)$ est surjectif. Ainsi l'homomorphisme $\pi_1^{\text{top}}(T, 1)(-1) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(G, 1)(-1)$ est surjectif, donc tout élément de $\pi_1^{\text{top}}(G, 1)(-1)$ est strictement algébrique.

Or soit G un groupe linéaire connexe et X un espace homogène de G . Soit $x \in X(\mathbb{C})$ et soit $H \subset G$ le stabilisateur de x . On ne suppose pas que H est connexe. On choisit un générateur de $\pi_1^{\text{top}}(\mathbb{C}^\times)$ et on oublie (-1) . La fibration $G(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ de fibre $H(\mathbb{C})$ donne une suite exacte

$$(1.1) \quad \pi_1^{\text{top}}(G, 1) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(X, x) \rightarrow \pi_0(H) \rightarrow 1.$$

Soit $p_1 \in \pi_1^{\text{top}}(X, x)$. Montrons que p_1 est strictement algébrique.

On désigne par h_0 l'image de p_1 dans $\pi_0(H)$. Alors h_0 est un élément semi-simple et il est donc l'image d'un élément semi-simple $h \in H(\mathbb{C})$. Par [Hu, Thm. 22.2], on sait que $h \in T(\mathbb{C})$ pour un certain tore maximal T de G . On désigne par M le sous-groupe fermé de H engendré par h , alors $M \subset T$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & T & \longrightarrow & T/M \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/H \longrightarrow 1 \end{array}$$

et un diagramme commutatif exact induit de morphismes de groupes

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1^{\text{top}}(T, 1) & \longrightarrow & \pi_1^{\text{top}}(T/M, 1) & \longrightarrow & \pi_0(M) & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \pi_1^{\text{top}}(G, 1) & \longrightarrow & \pi_1^{\text{top}}(G/H, x) & \longrightarrow & \pi_0(H) & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

On désigne par m_0 l'image de $h \in M(\mathbb{C})$ dans $\pi_0(M)$, alors l'image de m_0 dans $\pi_0(H)$ est h_0 . On voit que l'image h_0 de p_1 dans $\pi_0(H)$ est contenue dans l'image de la flèche verticale droite. Nous avons vu que la flèche verticale gauche est surjective. Une chasse au diagramme facile montre alors que p_1 est contenu dans l'image de la flèche verticale médiane. Mais T/M est un tore, donc tous les éléments de $\pi_1^{\text{top}}(T/M, 1)$ sont strictement algébriques. On conclut que p_1 est strictement algébrique. \square

Corollaire 1.3. *Pour (X, x) comme dans la proposition 1.2*

$$\pi_1^{\text{ét}}(X, x)(-1)_{\text{alg}} = \varkappa(\pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1)).$$

Démonstration. Le corollaire résulte de la proposition 1.1 et la proposition 1.2. \square

Lemme 1.4. *Soit X un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe G défini sur \mathbb{C} . Alors l'homomorphisme*

$$\varkappa: \pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X, x)(-1)$$

est injectif.

Démonstration. Le groupe $\pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1)$ est isomorphe à $\pi_1^{\text{top}}(X, x)$. On pose $\Gamma = \pi_1^{\text{top}}(X, x)$. Il faut montrer que Γ s'injecte dans sa complétion profinie, i.e. que Γ est un groupe résiduellement fini. On rappelle qu'un groupe A est dit résiduellement fini si l'intersection des sous-groupes normaux d'indice fini de A est $\{1\}$, ou, ce qui est équivalent, si l'intersection des sous-groupes d'indice fini de A est $\{1\}$.

On désigne par Δ l'image de $\pi_1^{\text{top}}(G, 1)$ dans $\Gamma = \pi_1^{\text{top}}(X, x)$ dans la suite exacte (1.1), alors on a une suite exacte courte

$$1 \rightarrow \Delta \rightarrow \Gamma \rightarrow \pi_0(H) \rightarrow 1.$$

Par [B2, Prop. 1.11] $\pi_1^{\text{top}}(G, 1)$ est un groupe abélien de type fini, donc Δ est un groupe abélien de type fini, donc Δ est résiduellement fini. Comme Δ est un sous-groupe d'indice fini de Γ , on conclut que Γ est résiduellement fini. \square

Théorème 1.5. *Soit X un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe G défini sur \mathbb{C} . Alors l'homomorphisme $\varkappa: \pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X, x)(-1)$ induit un isomorphisme de groupes*

$$\pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(X, x)(-1)_{\text{alg}} \subset \pi_1^{\text{ét}}(X, x)(-1).$$

Démonstration. Par le lemme 1.4 l'homomorphisme \varkappa est injectif, et par le corollaire 1.3 son image est $\pi_1^{\text{ét}}(X, x)(-1)_{\text{alg}}$. \square

Corollaire 1.6. *Soit G un groupe algébrique linéaire connexe arbitraire sur \mathbb{C} , et soit X un espace homogène arbitraire de G . Soit $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{C})$. Alors le groupe fondamental topologique $\pi_1^{\text{top}}(\tau X, \tau x)$ est canoniquement isomorphe à $\pi_1^{\text{top}}(X, x)$.*

Démonstration. On construit un isomorphisme canonique

$$\pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{top}}(\tau X, \tau x)(-1)$$

comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1) & \dashrightarrow & \pi_1^{\text{top}}(\tau X, \tau x)(-1) \\ \downarrow \iota & & \downarrow \tau \iota \\ \pi_1^{\text{ét}}(X, x)(-1)_{\text{alg}} & \xrightarrow{\tau_*} & \pi_1^{\text{ét}}(\tau X, \tau x)(-1)_{\text{alg}}, \end{array}$$

où les flèches verticales ι et $\tau \iota$ sont des isomorphismes de groupes. On choisit un isomorphisme $\eta: \pi_1^{\text{top}}(\mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$, et on obtient un isomorphisme composé

$$\lambda_{\tau, \eta}: \pi_1^{\text{top}}(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{top}}(\tau X, \tau x)(-1) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{top}}(\tau X, \tau x).$$

Si on change η en $-\eta$, l'isomorphisme composé $\lambda_{\tau, \eta}$ ne change pas. Ainsi on obtient un isomorphisme canonique

$$\lambda_{\tau}: \pi_1^{\text{top}}(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{top}}(\tau X, \tau x).$$

\square

2. PAIRES AUXILIAIRES

Dans cette section on rappelle les constructions de groupes et d'espaces homogènes auxiliaires, dont nous avons besoin pour notre démonstration des théorèmes 0.8 et 0.15. L'objectif est d'associer à un espace homogène X d'un groupe G vérifiant les hypothèses des théorèmes 0.8 et 0.15, des espaces homogènes Y, Z et W de certains k -groupes (G_Y, G_Z et G_W respectivement), avec des morphismes de paires

$$(G, X) \leftarrow (G_Y, Y) \rightarrow (G_Z, Z) \rightarrow (G_W, W),$$

qui vont permettre (dans les sections suivantes) de démontrer les théorèmes 0.8 et 0.15 successivement pour W, Z, Y et enfin pour X . On utilise pour cela des constructions de [B1], [BCS] et [BSch].

2.1. Construction de l'espace homogène Y . Soit X un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe lisse G défini sur un corps algébriquement clos k de caractéristique quelconque. On suppose que $\text{Pic}(G) = 0$.

On choisit un k -point $x \in X(k)$. On note H le stabilisateur de x dans G . Pour l'étude du groupe fondamental de X , on peut supposer sans perte de généralité que H est lisse (voir [BrSz], début de la section 3). On ne suppose pas en revanche que H est connexe.

Soit H^{mult} le plus grand groupe quotient de H qui est un groupe de type multiplicatif. On pose $H^{\text{ker car}} = \ker[H \rightarrow H^{\text{mult}}]$. On a un homomorphisme canonique $H^{\text{mult}} \rightarrow G^{\text{tor}}$, qui n'est généralement pas injectif.

On choisit un plongement $j: H^{\text{mult}} \hookrightarrow Q$ de H^{mult} dans un k -tore Q . On considère le plongement

$$j_*: H \rightarrow G \times_k Q, \quad h \mapsto (h, j(m(h))),$$

où $m: H \rightarrow H^{\text{mult}}$ est l'épimorphisme canonique. On pose

$$G_Y = G \times_k Q, \quad H_Y = j_*(H) \subset G_Y, \quad Y = G_Y/H_Y, \quad y = 1 \cdot H_Y \in Y(k).$$

La projection $\pi: G_Y = G \times Q \rightarrow G$ satisfait $\pi(H_Y) = H$, et elle induit une application $\pi_*: Y \rightarrow X$ telle que $\pi_*(y) = x$. On voit aisément que Y est un tore sur X sous le tore Q . On obtient un morphisme de paires

$$(G_Y, Y) \rightarrow (G, X).$$

On remarque que l'homomorphisme $H_Y^{\text{mult}} \rightarrow G_Y^{\text{tor}}$ est injectif, donc

$$H_Y \cap G_Y^{\text{ssu}} = H_Y^{\text{ker car}} \cong H^{\text{ker car}}.$$

2.2. Construction de l'espace homogène Z . On pose $G_Z = G_Y^{\text{tor}} = G_Y/G_Y^{\text{ssu}}$, où $G_Y^{\text{ssu}} := \ker[G_Y \rightarrow G_Y^{\text{tor}}]$. On a un homomorphisme canonique $\mu: G_Y \rightarrow G_Z$. Alors G_Z est un k -tore et on a $\widehat{G_Z} = \widehat{G_Y}$.

On considère le plongement d'inclusion $i: H \hookrightarrow G$, il induit un homomorphisme $i^{\text{mult}}: H^{\text{mult}} \rightarrow G^{\text{mult}} = G^{\text{tor}}$. On obtient un plongement

$$\iota: H^{\text{mult}} \hookrightarrow G^{\text{tor}} \times_k Q, \quad h \mapsto (i^{\text{mult}}(h), j(h)).$$

On pose

$$Z = Y/G_Y^{\text{ssu}} = (G^{\text{tor}} \times_k Q)/\iota(H^{\text{mult}}),$$

alors on a une application $\mu_*: Y \rightarrow Z$, dont la fibre au-dessus du k -point $z := \mu_*(y) \in Z(k)$ est isomorphe à

$$G_Y^{\text{ssu}}/(H_Y \cap G_Y^{\text{ssu}}) \cong G_Y^{\text{ssu}}/H^{\text{ker car}}.$$

La variété Z est un espace homogène du tore G_Z de stabilisateur $H_Z = H_Y^{\text{mult}} \subset G_Y^{\text{tor}} = G_Z$. On remarque que

$$\widehat{H_Z} = \widehat{H_Y^{\text{mult}}} = \widehat{H_Y}.$$

Enfin, on a un morphisme de paires

$$(G_Y, Y) \rightarrow (G_Z, Z).$$

2.3. Construction de l'espace homogène W . On pose $G_W = G_Z/H_Z$, $W = Z$, $w = z$, alors W est un espace homogène principal du tore G_W . On a un morphisme naturel de paires

$$(G_Z, Z) \rightarrow (G_W, W).$$

3. LE GROUPE FONDAMENTAL TOPOLOGIQUE

Dans cette section on prouve le théorème 0.8, le corollaire 0.10, et le théorème 0.12. On utilise des constructions de § 2.

3.1. Soit K^\bullet un complexe borné dans une catégorie abélienne \mathcal{A} , et soit B un objet de \mathcal{A} . On définit

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^i(K^\bullet, B) := \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(K^\bullet, B[i]),$$

où $D^b(\mathcal{A})$ est la catégorie dérivée des complexes bornés dans \mathcal{A} , et $B[i]$ est le complexe constitué d'un objet B en degré $-i$. Si A est un objet de \mathcal{A} , on a

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^i(A[0], B) = \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(A[0], B[i]) =: \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^i(A, B),$$

voir [GM, Def. III.5.3]. Par définition $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^0(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$.

On considère la catégorie des \mathbb{Z} -modules (groupes abéliens), et on écrit $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^i$ pour Ext dans cette catégorie. Soit A un groupe abélien. On écrit A_{tors} pour le sous-groupe de torsion de A , et on pose $A_{\mathrm{s.t.}} := A/A_{\mathrm{tors}}$, alors $A_{\mathrm{s.t.}}$ est sans torsion. Il est clair que $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(A, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(A_{\mathrm{s.t.}}, \mathbb{Z})$.

Lemme 3.2 (bien connu). *Soit A un groupe abélien, alors $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(A, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(A_{\mathrm{tors}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.*

Idée de la preuve. En utilisant la résolution injective de \mathbb{Z}

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

on montre que

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(A, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{coker}[\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})],$$

mais

$$\begin{aligned} \mathrm{coker}[\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})] &= \mathrm{coker}[\mathrm{Hom}(A_{\mathrm{s.t.}}, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})] \\ &= \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) / \mathrm{Hom}(A_{\mathrm{s.t.}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(A_{\mathrm{tors}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

□

Théorème 3.3. *Soit X un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe G sur \mathbb{C} . Soit $x \in X(\mathbb{C})$, on pose $H = \mathrm{Stab}_G(x)$. On suppose que $\mathrm{Pic}(G) = 0$ et que $H^{\mathrm{ker}^{\mathrm{car}}}$ est connexe. Alors il existe un isomorphisme canonique de groupes abéliens*

$$\pi_1^{\mathrm{top}}(X, x)(-1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G} \rightarrow \widehat{H}, \mathbb{Z}).$$

3.4. Prouvons le théorème 3.3. On traite d'abord le cas d'un espace homogène principal W d'un k -tore G_W . Soit $w \in W(\mathbb{C})$ un \mathbb{C} -point. L'application $G_W \rightarrow W$ définie par $g \mapsto g \cdot w$ est un isomorphisme de \mathbb{C} -variétés, et on a un isomorphisme induit

$$\pi_1^{\mathrm{top}}(G_W, 1)(-1) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\mathrm{top}}(W, w)(-1).$$

Comme

$$\pi_1^{\mathrm{top}}(G_W, 1)(-1) = G_{W*} = \mathrm{Hom}(\widehat{G_W}, \mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G_W}, \mathbb{Z}),$$

on obtient un isomorphisme canonique

$$\pi_1^{\mathrm{top}}(W, w)(-1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G_W}, \mathbb{Z}).$$

Ceci prouve le théorème 3.3 pour W .

3.5. On suppose qu'on a un homomorphisme de \mathbb{C} -tores $\gamma_\alpha: G_{W'} \rightarrow G_W$ et une application γ_α -équivariante d'espaces homogènes principaux $\alpha: W' \rightarrow W$ envoyant un \mathbb{C} -point $w' \in W'(\mathbb{C})$ sur un \mathbb{C} -point $w \in W(\mathbb{C})$. Alors le diagramme suivant commute clairement :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{\text{top}}(W', w')(-1) & \xrightarrow{\alpha_*} & \pi_1^{\text{top}}(W, w)(-1) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G_{W'}}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\gamma_{\alpha*}} & \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G_W}, \mathbb{Z}), \end{array}$$

où les flèches verticales sont les isomorphismes canoniques de § 3.4.

3.6. On a $Z = W$ et $G_Z/H_Z = G_W$, et le morphisme évident de complexes $\widehat{G_W} \rightarrow [\widehat{G_Z} \rightarrow \widehat{H_Z}]$ est un quasi-isomorphisme, donc

$$\pi_1^{\text{top}}(Z, z)(-1) = \pi_1^{\text{top}}(W, w)(-1) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G_W}, \mathbb{Z}) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0([\widehat{G_Z} \rightarrow \widehat{H_Z}], \mathbb{Z})$$

et on obtient un isomorphisme canonique $\pi_1^{\text{top}}(Z, z)(-1) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0([\widehat{G_Z} \rightarrow \widehat{H_Z}], \mathbb{Z})$. Ceci prouve le théorème 3.3 pour Z .

3.7. On a une fibration $\mu_*: Y(\mathbb{C}) \rightarrow Z(\mathbb{C})$ de fibre $G^{\text{ssu}}(\mathbb{C})/H^{\text{kercar}}(\mathbb{C})$. On a une fibration $G^{\text{ssu}}(\mathbb{C}) \rightarrow G^{\text{ssu}}(\mathbb{C})/H^{\text{kercar}}(\mathbb{C})$ de fibre connexe $H^{\text{kercar}}(\mathbb{C})$, donc on a une suite exacte de fibration

$$1 = \pi_1^{\text{top}}(G^{\text{ssu}}) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(G^{\text{ssu}}/H^{\text{kercar}}) \rightarrow \pi_0(H^{\text{kercar}}) = 1$$

(ici $\pi_1^{\text{top}}(G^{\text{ssu}}) = 1$ parce que $\text{Pic}(G) = 0$). On voit que $\pi_1^{\text{top}}(G^{\text{ssu}}/H^{\text{kercar}}) = 1$. Or on a une suite exacte de fibration

$$1 = \pi_1^{\text{top}}(G^{\text{ssu}}/H^{\text{kercar}}) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(Y, y) \xrightarrow{\mu_*} \pi_1^{\text{top}}(Z, z) \rightarrow \pi_0(G^{\text{ssu}}/H^{\text{kercar}}) = 1,$$

Il en résulte que l'homomorphisme $\pi_1^{\text{top}}(Y, y) \xrightarrow{\mu_*} \pi_1^{\text{top}}(Z, z)$ est un isomorphisme, donc l'homomorphisme $\pi_1^{\text{top}}(Y, y)(-1) \xrightarrow{\mu_*} \pi_1^{\text{top}}(Z, z)(-1)$ est un isomorphisme. Comme $\widehat{G_Y} = \widehat{G_Z}$ et $\widehat{H_Y} = \widehat{H_Z}$, on déduit le théorème 3.3 pour Y du théorème 3.3 pour Z .

3.8. On a un torseur $\pi_*: Y \rightarrow X$ sous le tore Q , d'où on obtient une suite exacte

$$\pi_1^{\text{top}}(Q, 1)(-1) \xrightarrow{\lambda_*} \pi_1^{\text{top}}(Y, y)(-1) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1) \rightarrow 0,$$

où la flèche λ_* est induite par l'application

$$\lambda: Q \rightarrow Y, q \mapsto q \cdot y.$$

On a une suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow (\widehat{G} \rightarrow \widehat{H}) \rightarrow (\widehat{G_Y} \rightarrow \widehat{H}) \rightarrow (\widehat{Q} \rightarrow 0) \rightarrow 0,$$

d'où on obtient une suite exacte

$$(3.1) \quad \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{Q}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G_Y} \rightarrow \widehat{H}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G} \rightarrow \widehat{H}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

(car d'après le lemme 3.2 $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\widehat{Q}, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(\widehat{Q}_{\text{tors}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$). On obtient un diagramme avec des lignes exactes

(3.2)

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1^{\text{top}}(Q, 1)(-1) & \xrightarrow{\lambda_*} & \pi_1^{\text{top}}(Y, y)(-1) & \xrightarrow{\pi_*} & \pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & \boxed{1} & \downarrow \cong & \boxed{2} & \downarrow & & \\ \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{Q}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G}_Y \rightarrow \widehat{H}_Y, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G} \rightarrow \widehat{H}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

On montre que le rectangle $\boxed{1}$ commute. On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1^{\text{top}}(Q, 1)(-1) & \xrightarrow{\lambda_*} & \pi_1^{\text{top}}(Y, y)(-1) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1^{\text{top}}(Z, z)(-1) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1^{\text{top}}(W, w)(-1) \\ \downarrow \cong & \boxed{1} & \downarrow \cong & \boxed{3} & \downarrow \cong & \boxed{4} & \downarrow \cong \\ \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{Q}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G}_Y \rightarrow \widehat{H}_Y, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G}_Z \rightarrow \widehat{H}_Z, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G}_W \rightarrow \widehat{H}_W, \mathbb{Z}). \end{array}$$

Par construction, les rectangles $\boxed{3}$ et $\boxed{4}$ commutent. D'après § 3.5 le grand rectangle $\boxed{1} \cup \boxed{3} \cup \boxed{4}$ commute. Il en résulte que le rectangle $\boxed{1}$ commute.

Dans le diagramme exact (3.2), le rectangle $\boxed{1}$ commute, et on définit la flèche en pointillés faisant commuter le rectangle $\boxed{2}$.

Ainsi on obtient un isomorphisme

$$(3.3) \quad \pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G} \rightarrow \widehat{H}, \mathbb{Z}),$$

qui *a priori* peut dépendre du choix d'un plongement $j: H^{\text{mult}} \hookrightarrow Q$.

3.9. Dans § 2.1 le torseur $Y \rightarrow X$ a été construit à partir d'un plongement $j: H^{\text{mult}} \hookrightarrow Q$. Si on choisit un autre plongement $j': H^{\text{mult}} \hookrightarrow Q'$, on obtient un autre torseur $Y' \rightarrow X$ sous Q' . On pose $Q'' = Q \times_k Q'$, et on note $j'': H^{\text{mult}} \hookrightarrow Q''$ le plongement diagonal. On obtient un torseur $Y'' \rightarrow X$ sous Q'' dominant à la fois Y et Y' , et on prouve facilement que l'isomorphisme (3.3) ne dépend pas du choix du plongement $j: H^{\text{mult}} \hookrightarrow Q$. Ceci conclut la preuve du théorème 3.3. \square

Corollaire 3.10. *Sous les hypothèses du théorème 3.3*

(a) *on a une suite exacte canonique*

$$(3.4) \quad \text{Hom}(\widehat{H}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} \text{Hom}(\widehat{G}, \mathbb{Z}) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1) \rightarrow \pi_0(H)(-1) \rightarrow 0,$$

où $i: H \hookrightarrow G$ est l'homomorphisme d'inclusion ;

(b) *si en plus le sous-groupe H est connexe, alors la suite exacte (3.4) induit un isomorphisme canonique*

$$\text{coker}[H_*^{\text{tor}} \xrightarrow{i_*} G_*^{\text{tor}}] \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1).$$

Démonstration. La suite exacte courte de complexes

$$0 \rightarrow [0 \rightarrow \widehat{H}] \rightarrow [\widehat{G} \rightarrow \widehat{H}] \rightarrow [\widehat{G} \rightarrow 0] \rightarrow 0$$

induit une suite exacte longue

(3.5)

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{H}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G} \rightarrow \widehat{H}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\widehat{H}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\widehat{G}, \mathbb{Z}).$$

On a $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{H}, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(\widehat{H}, \mathbb{Z})$ et $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G}, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(\widehat{G}, \mathbb{Z})$. D'après le lemme 3.2 on a $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\widehat{G}, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(\widehat{G}_{\text{tors}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ et

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\widehat{H}, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(\widehat{H}_{\text{tors}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\pi_0(H), \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \pi_0(H)(-1).$$

D'après le théorème 3.3 on peut écrire $\pi_1^{\text{top}}(X, x)(-1)$ au lieu de $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G} \rightarrow \widehat{H}, \mathbb{Z})$ dans (3.5). Ceci prouve l'assertion (a) du corollaire ; l'assertion (b) en résulte immédiatement. \square

Théorème 3.11. *Soit X un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe G sur \mathbb{C} . Soit $x \in X(\mathbb{C})$, on pose $H = \text{Stab}_G(x)$. On suppose que $\text{Pic}(G) = 0$ et que H est connexe. Alors il existe un isomorphisme canonique de groupes abéliens*

$$\mathcal{H}^{-1}(C_{X*}) \xrightarrow{\sim} \pi_2^{\text{top}}(X, x)(-1).$$

Démonstration. On écrit la suite exacte de fibration

$$0 = \pi_2^{\text{top}}(G, 1)(-1) \rightarrow \pi_2^{\text{top}}(X, x)(-1) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(H, 1)(-1) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(G, 1)(-1),$$

où l'annulation du groupe $\pi_2^{\text{top}}(G, 1)$ est un théorème d'Élie Cartan (pour le cas de groupes de Lie compacts, voir [Bo]). On écrit également la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow G_*^{\text{tor}} \rightarrow \langle T_{H^{\text{sc}}*} \rightarrow T_{H^{\text{red}}*} \rightarrow G_*^{\text{tor}} \rangle \rightarrow \langle T_{H^{\text{sc}}*} \rightarrow T_{H^{\text{red}}*} \rangle[1] \rightarrow 0$$

(où G_*^{tor} est en degré 0 dans le complexe central) et on obtient le diagramme suivant, à lignes exactes

$$(3.6) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}^{-1}(C_{X*}) & \longrightarrow & \mathcal{H}^0(\langle T_{H^{\text{sc}}*} \rightarrow T_{H^{\text{red}}*} \rangle) & \longrightarrow & G_*^{\text{tor}} \\ & & \downarrow \Psi & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & \pi_2^{\text{top}}(X, x)(-1) & \longrightarrow & \pi_1^{\text{top}}(H, 1)(-1) & \longrightarrow & \pi_1^{\text{top}}(G, 1)(-1). \end{array}$$

L'isomorphisme vertical $\mathcal{H}^0(\langle T_{H^{\text{sc}}*} \rightarrow T_{H^{\text{red}}*} \rangle) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{top}}(H, 1)(-1)$ dans ce diagramme a été construit dans [B2, Prop. 1.11] (on note que

$$\mathcal{H}^0(\langle T_{H^{\text{sc}}*} \rightarrow T_{H^{\text{red}}*} \rangle) = \text{coker}[T_{H^{\text{sc}}*} \rightarrow T_{H^{\text{red}}*}] = \pi_1^{\text{alg}}(H)$$

est le groupe fondamental algébrique introduit dans [B2]). Comme cet isomorphisme est fonctoriel en H , le rectangle à droite est commutatif. Ce diagramme permet finalement de construire l'isomorphisme canonique en pointillés

$$\mathcal{H}^{-1}(C_{X*}) \xrightarrow{\sim} \pi_2^{\text{top}}(X, x)(-1),$$

ce qui conclut la preuve du théorème. \square

4. CARACTÉRISTIQUE POSITIVE : STABILISATEUR CONNEXE

Dans cette section on prouve le théorème 0.14. On commence par le lemme crucial suivant :

Lemme 4.1. *Soient G, G' deux k -groupes algébriques connexes et $f : (G, X, x) \rightarrow (G', X', x')$ un morphisme d'espaces homogènes à stabilisateurs respectifs $H := \text{Stab}_G(x)$ et $H' := \text{Stab}_{G'}(x')$, de sorte que le morphisme $G \rightarrow G'$ soit surjectif. On note $G_0 := \ker(G \rightarrow G')$ et $X_0 := f^{-1}(x)$. On suppose que H', H et G_0 sont connexes. Alors on a une suite exacte de groupes :*

$$\pi_1^{\text{ét}}(X_0, x)^{(p')} \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X, x)^{(p')} \xrightarrow{f_*} \pi_1^{\text{ét}}(X', x')^{(p')} \rightarrow 1.$$

Démonstration. On définit les k -groupes linéaires $G_1 := G \times_{G'} H'$ et $H_1 := H \times_G G_1$. Alors on a une suite exacte canonique

$$1 \rightarrow G_0 \rightarrow G_1 \rightarrow H' \rightarrow 1,$$

donc en particulier le groupe G_1 est connexe. On vérifie facilement que X_0 est naturellement un espace homogène de G_1 , de stabilisateur H_1 .

Montrons d'abord la surjectivité de f_* . En utilisant [Gr], exposé IX, corollaire 5.6, il suffit de vérifier que f est un morphisme universellement submersif à fibres géométriquement connexes, ce qui résulte du fait que f est fidèlement plat et quasi-compact (voir [SGA3], exposé VI_B, proposition 9.2.(xiii).a) : les deux morphismes $G \rightarrow G'$ et $G' \rightarrow X'$ sont fidèlement plats et de présentation finie), ainsi que du fait que G_1 est connexe.

Montrons maintenant l'exactitude de la suite en $\pi_1^{\text{ét}}(X)^{(p')}$. Pour cela, on utilise le théorème 1.2 de [BrSz]. En effet, suivant [Sz], corollaire 5.5.9, il suffit de montrer que pour tout revêtement étale galoisien $Y \rightarrow X$, de degré premier à p , tel que $Y \times_X X_0$ ait une section sur X_0 , il existe un revêtement étale fini connexe $Y' \rightarrow X'$, de degré premier à p , tel qu'une composante connexe de $Y' \times_{X'} X$ soit munie d'un X -morphisme surjectif vers Y . Soit donc un revêtement étale galoisien $Y \rightarrow X$ (de degré premier à p) tel que $Y_0 := Y \times_X X_0$ admette une section $s_0 : X_0 \rightarrow Y_0$. Comme H est connexe, le théorème 1.2 de [BrSz] assure qu'il existe un groupe linéaire connexe \tilde{G} , une isogénie centrale $\tilde{G} \rightarrow G$ et un relevé \tilde{H} de H dans \tilde{G} tel que $Y = \tilde{G}/\tilde{H}$. On a donc un diagramme commutatif exact de la forme :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mu & \longrightarrow & \tilde{G} & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & Y = \tilde{G}/\tilde{H} & \longrightarrow & X = G/H \end{array}$$

On définit alors $Y_0 := Y \times_X X_0$ et le k -groupe $\tilde{G}_1 := \tilde{G} \times_G G_1$.

Considérons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{G} & \longrightarrow & G \\ & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{G}_1 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & G \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & Y & \longrightarrow & X \\ & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\ Y_0 & \longrightarrow & X_0 & & \end{array},$$

où les quatre carrés sont cartésiens (pour la face de droite, c'est une conséquence de la définition de G_1). Ce diagramme implique l'existence d'une flèche verticale $\tilde{G}_1 \rightarrow Y_0$ qui fait commuter le cube. Puisque

$$\tilde{G}_1 = G_1 \times_G \tilde{G} = (X_0 \times_X G) \times_G \tilde{G} = X_0 \times_X \tilde{G} = X_0 \times_X (Y \times_X G)$$

et

$$Y_0 \times_{X_0} G_1 = Y_0 \times_{X_0} (X_0 \times_X G) = Y_0 \times_X G = (X_0 \times_X Y) \times_X G,$$

on vérifie que dans le cube précédent, tous les carrés sont cartésiens, donc en particulier le carré suivant

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{G}_1 & \longrightarrow & G_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_0 & \longrightarrow & X_0 \end{array}$$

est cartésien. On voit aussi que le morphisme $(\widetilde{G}_1, Y_0) \rightarrow (G_1, X_0)$ est un morphisme d'espaces homogènes.

La section $s_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ induit alors une section $s_1 : G_1 \rightarrow \widetilde{G}_1$ du morphisme π (comme morphisme de k -variétés) apparaissant dans la suite exacte centrale suivante

$$1 \rightarrow \mu \rightarrow \widetilde{G}_1 \xrightarrow{\pi} G_1 \rightarrow 1$$

où μ est un groupe fini de type multiplicatif. Par construction, on a $s_1(1) = 1$. Or G_1 est connexe, donc le lemme de Rosenlicht assure que s_1 est un homomorphisme de groupes algébriques (voir par exemple la preuve de la proposition 3.2 de [CT]).

Cela permet d'identifier \widetilde{G}_1 avec le produit direct $G_1 \times \mu$. En particulier, la section s_1 permet de voir naturellement G_1 comme un sous-groupe distingué de \widetilde{G} . On note alors $\widetilde{G}' := \widetilde{G}/G_1$. On dispose d'une suite exacte centrale canonique

$$1 \rightarrow \mu \rightarrow \widetilde{G}' \rightarrow G' \rightarrow 1.$$

Définissons Y' comme le quotient de \widetilde{G}' par l'image $\widetilde{H}/\widetilde{H}_1$ de \widetilde{H} dans \widetilde{G}' . Alors $Y' \rightarrow X'$ est un revêtement étale fini connexe, et par construction on a $Y' \times_{X'} X \cong Y$ au-dessus de X . Cela conclut la preuve de l'exactitude de la suite du lemme. \square

Théorème 4.2. *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$. Soit G/k un groupe linéaire connexe lisse et X/k un espace homogène de G . Soit $x \in X(k)$, on pose $H := \text{Stab}_G(x)$. On suppose que $\text{Pic}(G) = 0$ et que H est lisse et connexe. Alors il existe un isomorphisme canonique de groupes abéliens :*

$$\text{coker}[H_*^{\text{tor}} \xrightarrow{i_*} G_*^{\text{tor}}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(X, x)^{(p')}(-1).$$

Nous prouvons le théorème 4.2 : on va traiter d'abord le cas des tores, puis des groupes linéaires connexes, et enfin celui des espaces homogènes.

Lemme 4.3 (bien connu). *Soit T un tore défini sur k . Alors il y a un isomorphisme canonique et fonctoriel $T_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(T)^{(p')}(-1)$.*

Démonstration. Soit $Y \rightarrow T$ un revêtement étale galoisien de degré n premier à p . Par [Mi] ou [BrSz, Prop. 1.1(a)], le revêtement $Y \rightarrow T$ a une structure d'une isogénie centrale $T' \rightarrow T$. Il en résulte que $Y \rightarrow T$ est dominé par l'isogénie $\varphi_n : T \rightarrow T$, $t \mapsto t^n$. On pose $T_n = \ker \varphi_n$ (considéré comme un groupe abstrait), alors $T_n = \mu_n \otimes_{\mathbb{Z}} T_*$. On a :

$$\begin{aligned} \pi_1^{\text{ét}}(T)^{(p')}(-1) &= \text{Hom}_{\text{cont.}}(\mathbb{Z}_{(p')}(1), \pi_1^{\text{ét}}(T)^{(p')}) = \varprojlim \text{Hom}_{\text{cont.}}(\mathbb{Z}_{(p')}(1), T_n) \\ &= \varprojlim \text{Hom}_{\text{cont.}}(\mu_n, \mu_n \otimes_{\mathbb{Z}} T_*) = \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} T_* = \mathbb{Z}_{(p')} \otimes_{\mathbb{Z}} T_*. \end{aligned}$$

\square

Lemme 4.4 (bien connu). *Soit G :*

- (a) *un groupe unipotent connexe sur k , ou*
- (b) *un groupe semi-simple simplement connexe sur k .*

Alors $\pi_1^{\text{ét}}(G)^{(p')} = 1$.

Démonstration. Par [Mi] ou [BrSz, Prop. 1.1(a)], tout revêtement étale galoisien $Y \rightarrow G$ de degré n premier à p admet une structure d'une isogénie centrale $G' \rightarrow G$, mais G comme dans (a) ou (b) n'admet pas d'isogénie centrale non triviale de degré premier à p . \square

On considère maintenant le cas d'un groupe linéaire connexe lisse quelconque. Si G est un tel groupe, on note G^u son radical unipotent et $G^{\text{red}} := G/G^u$. Soit T_G un tore maximal de G^{red} et $T_{G^{\text{sc}}}$ un tore maximal de G^{sc} dont l'image dans G^{red} est contenue dans T_G . On définit alors (voir [B2])

$$\pi_1^{\text{alg}}(G) := \text{coker}[T_{G^{\text{sc}}} \rightarrow T_{G*}] = T_{G*}/T_{G^{\text{sc}}*}.$$

Proposition 4.5. *Soit G un k -groupe linéaire connexe lisse. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$\pi_1^{\text{alg}}(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(G)^{(p')}(-1).$$

Démonstration. Tout d'abord, on se ramène au cas où G est réductif : en effet, le morphisme $G \rightarrow G^{\text{red}}$ satisfait les hypothèses du lemme 4.1, donc on en déduit une suite exacte

$$\pi_1^{\text{ét}}(G^u)^{(p')} \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(G)^{(p')} \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(G^{\text{red}})^{(p')} \rightarrow 0.$$

Or $\pi_1^{\text{ét}}(G^u)^{(p')} = 0$ d'après le lemme 4.4(a), donc on a un isomorphisme $\pi_1^{\text{ét}}(G)^{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(G^{\text{red}})^{(p')}$ et on peut donc supposer G réductif.

Dans ce cas, il existe une résolution de G , notée

$$(4.1) \quad 1 \rightarrow S \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow 1,$$

où S est un tore central et G' est un groupe réductif tel que G'^{ss} est simplement connexe.

Montrons la proposition pour G' . On dispose d'une suite exacte courte

$$1 \rightarrow G'^{\text{ss}} \rightarrow G' \rightarrow G'^{\text{tor}} \rightarrow 1,$$

où G'^{ss} est semi-simple simplement connexe. On considère le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{coker}[T_{G'^{\text{ss}}} \rightarrow T_{G'*}] \otimes \mathbb{Z}_{(p')} & \longrightarrow & G'^{\text{tor}}_* \otimes \mathbb{Z}_{(p')} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ \pi_1^{\text{ét}}(G'^{\text{ss}})^{(p')}(-1) & \longrightarrow & \pi_1^{\text{ét}}(G')^{(p')}(-1) & \longrightarrow & \pi_1^{\text{ét}}(G'^{\text{tor}})^{(p')}(-1) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Par le lemme 4.1, la deuxième ligne du diagramme est exacte, où $\pi_1^{\text{ét}}(G'^{\text{ss}})^{(p')}(-1) = 0$ d'après le lemme 4.4(b), car G'^{ss} est simplement connexe. De la suite exacte courte

$$1 \rightarrow T_{G'^{\text{ss}}} \rightarrow T_{G'} \rightarrow G'^{\text{tor}} \rightarrow 1$$

on obtient une suite exacte courte

$$0 \rightarrow T_{G'^{\text{ss}}} \rightarrow T_{G'*} \rightarrow G'^{\text{tor}}_* \rightarrow 0,$$

d'où des isomorphismes

$$\text{coker}[T_{G'^{\text{ss}}} \rightarrow T_{G'*}] \xrightarrow{\sim} G'^{\text{tor}}_* \quad \text{et} \quad \text{coker}[T_{G'^{\text{ss}}} \rightarrow T_{G'*}] \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} G'^{\text{tor}}_* \otimes \mathbb{Z}_{(p')}$$

et l'exactitude de la première ligne du diagramme. Ce diagramme induit un isomorphisme canonique en pointillés, ce qui démontre la proposition pour G' .

Déduisons-en le résultat pour G . On applique le lemme 4.1 à la suite exacte courte (4.1), et on obtient le diagramme commutatif suivant, dont la seconde ligne est exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} S_* \otimes \mathbb{Z}_{(p')} & \longrightarrow & \pi_1^{\text{alg}}(G') \otimes \mathbb{Z}_{(p')} & \longrightarrow & \pi_1^{\text{alg}}(G) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \\ \pi_1^{\text{ét}}(S, 1)^{(p')}(-1) & \longrightarrow & \pi_1^{\text{ét}}(G', 1)^{(p')}(-1) & \longrightarrow & \pi_1^{\text{ét}}(G, 1)^{(p')}(-1) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

De la suite exacte (4.1) on obtient une suite exacte courte

$$0 \rightarrow S_* \rightarrow \pi_1^{\text{alg}}(G') \rightarrow \pi_1^{\text{alg}}(G) \rightarrow 0,$$

d'où, en vertu de l'exactitude à droite du produit tensoriel, l'exactitude de la première ligne du diagramme. Ce diagramme assure finalement l'existence de l'isomorphisme canonique en pointillés et conclut la preuve de la proposition 4.5. \square

Corollaire 4.6 (cf. [Mi, Lemme 3 et bas de la page 152], voir aussi [BrSz, Prop. 1.1(b)]). *Le groupe $\pi_1^{\text{ét}}(G)^{(p')}(-1)$ est un quotient de $T_{G*} \otimes \mathbb{Z}_{(p')}$, où T_G est un tore maximal de G .*

4.7. Démonstration du théorème 4.2. Si $X = G/H$, avec les hypothèses du théorème 4.2, on remarque que l'on a un isomorphisme canonique $\text{coker}[\pi_1^{\text{alg}}(H) \rightarrow \pi_1^{\text{alg}}(G)] \cong \text{coker}[H_*^{\text{tor}} \rightarrow G_*^{\text{tor}}]$. On applique alors le lemme 4.1 au morphisme $(G, G) \rightarrow (G, X)$, et on obtient le diagramme commutatif suivant dont la seconde ligne est exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1^{\text{alg}}(H) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} & \longrightarrow & \pi_1^{\text{alg}}(G) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} & \longrightarrow & \text{coker}[H_*^{\text{tor}} \rightarrow G_*^{\text{tor}}] \otimes \mathbb{Z}_{(p')} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \\ \pi_1^{\text{ét}}(H, 1)^{(p')}(-1) & \longrightarrow & \pi_1^{\text{ét}}(G, 1)^{(p')}(-1) & \longrightarrow & \pi_1^{\text{ét}}(X, x)^{(p')}(-1) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

De la suite exacte courte

$$1 \rightarrow G^{\text{ss}} \rightarrow H \rightarrow H^{\text{tor}} \rightarrow 1$$

on déduit une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \pi_1^{\text{alg}}(G^{\text{ss}}) \rightarrow \pi_1^{\text{alg}}(H) \rightarrow H_*^{\text{tor}} \rightarrow 0,$$

d'où $\pi_1^{\text{alg}}(H)_{\text{s.t.}} = H_*^{\text{tor}}$. D'autre part, comme G^{ss} est simplement connexe, on a $\pi_1^{\text{alg}}(G) = G_*^{\text{tor}}$. On obtient que

$$\text{coker}[\pi_1^{\text{alg}}(H) \rightarrow \pi_1^{\text{alg}}(G)] = \text{coker}[H_*^{\text{tor}} \rightarrow G_*^{\text{tor}}]$$

et que

$$\text{coker}[\pi_1^{\text{alg}}(H) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \rightarrow \pi_1^{\text{alg}}(G) \otimes \mathbb{Z}_{(p')}] = \text{coker}[H_*^{\text{tor}} \rightarrow G_*^{\text{tor}}] \otimes \mathbb{Z}_{(p')},$$

donc la première ligne du diagramme est exacte. Finalement, le diagramme permet bien de définir l'isomorphisme souhaité (en pointillés)

$$\text{coker}[H_*^{\text{tor}} \rightarrow G_*^{\text{tor}}] \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(X, x)^{(p')}(-1).$$

\square

5. CARACTÉRISTIQUE POSITIVE : STABILISATEUR NON CONNEXE

Théorème 5.1. *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$. Soit G/k un groupe linéaire connexe lisse et X/k un espace homogène de G . Soit $x \in X(k)$, on pose $H := \text{Stab}_G(x)$. On suppose que $\text{Pic}(G) = 0$, H est lisse et $H^{\text{ker car}}$ est connexe. Alors il existe un isomorphisme canonique de groupes abéliens :*

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{G} \rightarrow \widehat{H}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(X, x)^{(p')}(-1).$$

Pour prouver le théorème 5.1, on commence par étendre le théorème 1.2(a) de [BrSz] en supprimant l'hypothèse de connexité sur le stabilisateur :

Proposition 5.2. *Soit G un k -groupe connexe lisse, X un k -espace homogène de G , $x \in X(k)$. Soit $\tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement étale galoisien de degré premier à p . Alors il existe une isogénie centrale $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$ et un sous-groupe d'indice fini \tilde{H} de $\pi^{-1}(H)$ tel que le morphisme naturel $\tilde{G}/\tilde{H} \rightarrow X$ se factorise en un isomorphisme $\tilde{G}/\tilde{H} \xrightarrow{\sim} \tilde{X}$.*

Démonstration. On fixe un point $\tilde{x} \in \tilde{X}(k)$ au-dessus de x . On considère le morphisme quotient $\varphi : G \rightarrow X$ défini par l'action de G sur le point x , et on considère le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{X} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{\varphi} & X, \end{array}$$

où $Y = G \times_X \tilde{X}$. On note F la fibre de Y au-dessus de $1 \in G(k)$, et on note $\Gamma = \text{Aut}(Y/G)$, alors Γ agit transitivement sur F . La variété Y n'est pas connexe en général. On note \tilde{G} la composante connexe de Y contenant le point marqué $y = (1, \tilde{x})$. Alors la restriction $\pi_{\tilde{G}}$ de π à \tilde{G} est un revêtement étale de G .

Prouvons que $\pi_{\tilde{G}} : \tilde{G} \rightarrow G$ est un revêtement galoisien. On définit $F_{\tilde{G}} = F \cap \tilde{G}$ et

$$\Gamma_{\tilde{G}} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(y) \in F_{\tilde{G}}\}.$$

Alors $\Gamma_{\tilde{G}} = \text{Stab}_{\Gamma}(\tilde{G})$, donc $\Gamma_{\tilde{G}}$ est un sous-groupe de Γ , $\Gamma_{\tilde{G}}$ agit sur \tilde{G} au-dessus de G , et $\Gamma_{\tilde{G}}$ agit transitivement sur $F_{\tilde{G}}$. On voit que $\text{Aut}(\tilde{G}/G)$ agit transitivement sur $F_{\tilde{G}}$, donc $\tilde{G} \rightarrow G$ est un revêtement galoisien.

Alors la proposition 1.1(a) de [BrSz] assure que la variété \tilde{G} a une structure de groupe algébrique sur k , telle que $\pi_{\tilde{G}} : \tilde{G} \rightarrow G$ soit une isogénie centrale de k -groupes. On peut supposer que $1_{\tilde{G}} = y := (1_G, \tilde{x})$. Or on dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{\tilde{G}}} & \tilde{X} \\ \downarrow \pi_{\tilde{G}} & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{\varphi} & X. \end{array}$$

On définit $\tilde{H} := \tilde{\varphi}_{\tilde{G}}^{-1}(\tilde{x})$.

Montrons que \tilde{H} est un sous-groupe algébrique de \tilde{G} . On fixe $h \in \tilde{H}(k)$. Pour $g = 1_{\tilde{G}} \in \tilde{G}(k)$ on a

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{G}}(gh) = \tilde{\varphi}_{\tilde{G}}(h) = \tilde{x} = \tilde{\varphi}_{\tilde{G}}(g).$$

Comme \tilde{G} est connexe, le corollaire 5.3.3 de [Sz] assure que $\tilde{\varphi}_{\tilde{G}}(gh) = \tilde{\varphi}_{\tilde{G}}(g)$ pour tout $g \in G(k)$. On voit que si $h \in \tilde{H}(k)$, le morphisme $\tilde{\varphi}_{\tilde{G}}$ est h -invariant à droite. Inversement, si le morphisme $\tilde{\varphi}_{\tilde{G}}$ est h -invariant à droite, alors $\tilde{\varphi}_{\tilde{G}}(h) = \tilde{x}$ et donc $h \in \tilde{H}(k)$. Ainsi $\tilde{H} \subset \tilde{G}$ est le stabilisateur de $\tilde{\varphi}_{\tilde{G}}$ et donc un sous-groupe algébrique.

Comme le morphisme $\tilde{\varphi}_{\tilde{G}}$ est \tilde{H} -invariant, il induit un morphisme naturel $\overline{\varphi}_{\tilde{G}} : \tilde{G}/\tilde{H} \rightarrow \tilde{X}$ qui est un revêtement étale fini connexe. La définition de \tilde{H} assure que la fibre de $\overline{\varphi}_{\tilde{G}}$ au-dessus \tilde{x} consiste d'un seul point, donc $\overline{\varphi}_{\tilde{G}}$ est un isomorphisme de variétés. \square

On montre ensuite la variante suivante du lemme 4.1 :

Lemme 5.3. *Soient G, G' deux k -groupes algébriques connexes et $f : (G, X, x) \rightarrow (G', X', x')$ un morphisme d'espaces homogènes à stabilisateurs respectifs $H := \text{Stab}_G(x)$ et $H' := \text{Stab}_{G'}(x')$, de sorte que les morphismes $G \rightarrow G'$ et $H \rightarrow H'$ soient surjectifs. On note $G_0 := \ker(G \rightarrow G')$ et $X_0 := f^{-1}(x)$. On suppose G_0 connexe. Alors on a une suite exacte de groupes :*

$$\pi_1^{\text{ét}}(X_0, x)^{(p')} \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X, x)^{(p')} \xrightarrow{f_*} \pi_1^{\text{ét}}(X', x')^{(p')} \rightarrow 1.$$

Démonstration. On vérifie que X_0 est naturellement un espace homogène de G_0 , de stabilisateur $H_0 := \ker(H \rightarrow H')$.

Montrons d'abord la surjectivité de f_* . En utilisant [Gr], exposé IX, corollaire 5.6, il suffit de vérifier que f est un morphisme universellement submersif à fibres géométriquement connexes, ce qui résulte du fait que f est fidèlement plat et quasi-compact, ainsi que du fait que G_0 est connexe.

Montrons maintenant l'exactitude de la suite en $\pi_1^{\text{ét}}(X)^{(p')}$. Pour cela, on utilise le théorème 1.2 de [BrSz]. Soit un revêtement étale galoisien $Y \rightarrow X$ (de degré premier à p) tel que $Y_0 := Y \times_X X_0$ admette une section $s_0 : X_0 \rightarrow Y_0$. La proposition 5.2 assure qu'il existe un groupe linéaire connexe \tilde{G} , une isogénie centrale $\tilde{G} \rightarrow G$ et un relevé \tilde{H} d'un sous-groupe d'indice fini de H dans \tilde{G} tel que le morphisme naturel $\tilde{G}/\tilde{H} \rightarrow X$ se factorise en un isomorphisme $\tilde{G}/\tilde{H} \rightarrow Y$. On définit $Y_0 := Y \times_X X_0$ et le k -groupe $\tilde{G}_0 := \tilde{G} \times_G G_0$. Puisque G_0 est connexe, la section $s_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ induit une section $\tilde{s}_0 : G_0 \rightarrow \tilde{G}_0$, dont on vérifie que c'est un morphisme de groupes. Cela permet d'identifier G_0 avec la composante neutre de \tilde{G}_0 , et donc de voir G_0 comme un sous-groupe distingué de \tilde{G} . On note alors $\tilde{G}' := \tilde{G}/G_0$. Définissons Y' comme le quotient de \tilde{G}' par l'image \tilde{H}/\tilde{H}_0 de \tilde{H} dans \tilde{G}' . Alors $Y' \rightarrow X'$ est un revêtement étale fini connexe, et par construction on a $Y' \times_{X'} X \cong \tilde{G}/\tilde{H}$ au-dessus de X , donc on a une factorisation $Y' \times_{X'} X \cong \tilde{G}/\tilde{H} \xrightarrow{\sim} Y \rightarrow X$. Cela conclut la preuve de l'exactitude de la suite du lemme. \square

5.4. Démonstration du théorème 5.1. Si X est un espace homogène d'un tore G à stabilisateur H , alors on a déjà vu que l'on avait un isomorphisme canonique $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0([\tilde{G} \rightarrow \tilde{H}], \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(X, x)^{(p')}(-1)$.

Si X est un espace homogène satisfaisant les hypothèses du théorème 5.1, on reprend les constructions auxiliaires de la section 2. On dispose des morphismes surjectifs de paires

$$(G, X) \leftarrow (G_Y, Y) \rightarrow (G_Z, Z).$$

On vérifie facilement que chacun de ces deux morphismes de paires vérifie les hypothèses du lemme 5.3. Par conséquent, le lemme 5.3 assure que les suites naturelles suivantes

$$\begin{aligned} \pi_1^{\text{ét}}(G^{\text{ss}}/H^{\text{kercar}}, y)^{(p')} &\rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(Y, y)^{(p')} \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(Z, z)^{(p')} \rightarrow 1 \\ \pi_1^{\text{ét}}(Q, 1)^{(p')} &\rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(Y, y)^{(p')} \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X, x)^{(p')} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

sont exactes. Puisque le morphisme $G^{\text{ss}} \rightarrow G^{\text{ss}}/H^{\text{kercar}}$ est universellement submersif et à fibres géométriquement connexes, le corollaire 5.6 de [Gr], exposé IX, assure que le morphisme $\pi_1^{\text{ét}}(G^{\text{ss}}, 1)^{(p')} \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(G^{\text{ss}}/H^{\text{kercar}}, y)^{(p')}$ est surjectif. Or $\pi_1^{\text{ét}}(G^{\text{ss}}, 1)^{(p')} = 0$ car G^{ss} est semi-simple simplement connexe. Donc finalement $\pi_1^{\text{ét}}(G^{\text{ss}}/H^{\text{kercar}}, y)^{(p')} = 0$.

On a donc un isomorphisme canonique

$$\pi_1^{\text{ét}}(Y, y)^{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(Z, z)^{(p')}.$$

Or Z est un espace homogène du k -tore G_Z , à stabilisateur $H_Z = H^{\text{tor}}$, donc le cas des espaces homogènes de tores assure que l'on a un isomorphisme canonique

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0([\widehat{G}_Z \rightarrow \widehat{H}_Z], \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(Z, z)^{(p')}(-1).$$

En outre, on sait que $\widehat{G}_Y = \widehat{G}_Z$ et $\widehat{H}_Y = \widehat{H}_Z$, donc on en déduit un isomorphisme canonique

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0([\widehat{G}_Y \rightarrow \widehat{H}_Y], \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(Y, y)^{(p')}(-1),$$

ce qui conclut la preuve du théorème pour Y .

Déduisons-en maintenant le théorème pour X : considérons le diagramme suivant à lignes exactes :

(5.1)

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\widehat{Q}, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0([\widehat{G}_Y \rightarrow \widehat{H}_Y], \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0([\widehat{G} \rightarrow \widehat{H}], \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \boxed{1'} & & \downarrow \cong & & \downarrow \\ \pi_1^{\text{ét}}(Q, 1)^{(p')}(-1) & \xrightarrow{\lambda_*} & \pi_1^{\text{ét}}(Y, y)^{(p')}(-1) & \xrightarrow{\phi_*} & \pi_1^{\text{ét}}(X, x)^{(p')}(-1) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont l'exactitude de la seconde ligne a été démontrée plus haut, et on obtient l'exactitude de la première ligne de la suite exacte (3.1) et de l'exactitude à droite du produit tensoriel. On démontre que le rectangle $\boxed{1'}$ est commutatif comme on démontre la commutativité du rectangle $\boxed{1}$ du diagramme (3.2). Le diagramme (5.1) permet bien de définir la flèche en pointillés, dont on démontre comme en § 3.9 qu'elle ne dépend pas du plongement $j : H^{\text{tor}} \rightarrow Q$. Finalement, cela démontre que l'on a bien un isomorphisme canonique

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0([\widehat{G} \rightarrow \widehat{H}], \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(X, x)^{(p')}(-1),$$

ce qui conclut la preuve du théorème 5.1. \square

RÉFÉRENCES

- [Bo] A. Borel, *Groupes d'homotopie des groupes de Lie, I*, Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), Exposé No. 12, p. 1–8.
- [B1] M. Borovoi, *The Brauer-Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer*, J. reine angew. Math. **473** (1996), 181–194.
- [B2] M. Borovoi, *Abelian Galois cohomology of reductive groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **132** (1998), no. 626.

- [BCS] M. Borovoi, J.-L. Colliot-Thélène and A. N. Skorobogatov, The elementary obstruction and homogeneous spaces, *Duke Math. J.* **141** (2008), 321–364.
- [BSch] M. Borovoi and T. M. Schlank, *A cohomological obstruction to weak approximation for homogeneous spaces*, *Moscow Math. J.* **12** (2012), 1–20.
- [BvH1] M. Borovoi and J. van Hamel, *Extended Picard complexes and linear algebraic groups*, *J. reine angew. Math.* **627** (2009), 53–82.
- [BvH2] M. Borovoi and J. van Hamel, *Extended equivariant Picard complexes and homogeneous spaces*, *Transform. Groups* **17** (2012), 51–86.
- [BrSz] M. Brion and T. Szamuely, *Prime-to- p étale covers of algebraic groups*, to appear in *Bull. London Math. Soc.*
- [CT] J.-L. Colliot-Thélène, *Résolutions flasques des groupes linéaires connexes*, *J. reine angew. Math.* **618** (2008), 77–133.
- [D1] C. Demarche, *Une formule pour le groupe de Brauer d'un torseur*, *J. Algebra* **347** (2011), 96–132.
- [D2] C. Demarche, *Abélianisation des espaces homogènes et applications arithmétiques*, à paraître dans "Torsors, étale homotopy and applications to rational points" (Edinburgh, 2011).
- [GM] S. I. Gelfand and Yu. I. Manin, *Methods of Homological Algebra*, Springer-Verlag, Berlin 1996.
- [GA] C. D. González-Avilés, *Flasque resolutions of reductive group schemes*, to appear in *Cent. Eur. J. Math.*
- [Gr] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61, *Lecture Notes in Math.* **224**, Springer, Berlin, 1971, New annotated edition : Société Mathématique de France, Paris, 2003.
- [Hu] J. E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*. Graduate Texts in Mathematics, No. 21. Springer-Verlag, New York, 1981.
- [Me] A. S. Merkurjev, *K-theory and algebraic groups*, *European Congress of Mathematics*, Vol. II (Budapest, 1996), pp. 43–72, *Progr. Math.*, 169, Birkhäuser, Basel, 1998.
- [Mi] M. Miyanishi, *On the algebraic fundamental group of an algebraic group*, *J. Math. Kyoto Univ.* **12** (1972), 361–367.
- [MS] J. S. Milne and J. Suh, *Nonhomeomorphic conjugates of connected Shimura varieties*, *Amer. J. Math.* **132** (2010), 731–750.
- [Sa] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, *J. reine angew. Math.* **327** (1981), 12–80.
- [SGA3] *Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1962–64, Schémas en groupes* (M. Demazure, A. Grothendieck, eds.), *Lecture Notes Math.*, vol. **151, 152, 153**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1970.
- [Se] J.-P. Serre, *Exemples de variétés projectives conjuguées non homéomorphes*, *C. R. Acad. Sci. Paris* **258** (1964) 4194–4196.
- [Sz] T. Szamuely, *Galois Groups and Fundamental Groups*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 117. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

BOROVoi : RAYMOND AND BEVERLY SACKLER SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, TEL AVIV UNIVERSITY, 69978 TEL AVIV, ISRAEL

E-mail : borovoi@post.tau.ac.il

DEMARCHE : INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU (IMJ), UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE, 4 PLACE JUSSIEU, 75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE

E-mail : demarche@math.jussieu.fr